

Отношения

1. Множество $A = \{a, b, c\}$, множество $B = \mathcal{B}(A)$. Изобразите оргграф отношения $x \in Y$, где $x \in A, Y \in \mathcal{B}(A)$.

2. Пусть A – множество всех точек плоскости, а B – множество всех прямых той же плоскости. Пара (a, l) принадлежит отношению R , если точка a лежит на прямой l .

а) Сформулируйте в терминах геометрии смысл отношения R^{-1} .

б) Чему равно произведение $R \circ R^{-1}$? А $R^{-1} \circ R$?

3. Пусть R – некоторое отношение на произвольном множестве M . Верно ли, что $(R^{-1})^2 = (R^2)^{-1}$?

4. Верно ли каждое из следующих равенств

а) $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$;

б) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) = (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

для бинарных отношений R_1, R_2, R_3 , определённых на тех множествах, где можно выполнять соответствующие операции над этими отношениями? Ответ «Да» надо обосновать, ответ «Нет» аргументировать приведением примера.

5. На множестве $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ рассматривается отношение « x делится нацело на y ». Исследовать это отношение и изобразить его в виде оргграфа.

Если M – числовое множество, то *графиком бинарного отношения R на множестве M* называется множество точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy , для которых $x R y$.

6. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Исследовать отношение R на M и построить его график, если

а) $x R y \Leftrightarrow x / y$ – целое число; г) $x R y \Leftrightarrow |x - y| < 3$;

б) $x R y \Leftrightarrow (x - y) / 3$ — целое число; д) $x R y \Leftrightarrow (x - y) / 3 \in M \cup \{0\}$.

в) $x R y \Leftrightarrow x + y = 8$;

7. На множестве $M = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ исследовать отношения, заданные условиями а) – д) из задания 4, и построить их графики.

8. Из свойств рефлексивность, симметричность и транзитивность, а также их отрицаний можно составить 8 комбинаций (объясните, почему именно столько). Ниже приведены 5 из них.

а) Рефлексивность, симметричность, нетранзитивность.

б) Нерефлексивность, симметричность, транзитивность.

в) Рефлексивность, не симметричность, транзитивность.

г) Нерефлексивность, несимметричность, транзитивность.

д) Нереплексивность, несимметричность, нетранзитивность.

Приведите примеры отношений, обладающих каждым из указанных наборов свойств.

9. Пусть M – непустое множество. Отметьте в таблице 1 знаком «+» те свойства, которыми данное отношение, рассматриваемое на множестве M , обладает, и знаком «-» те, которыми не обладает.

Таблица 1.

Отношение	Рефлексивность	Симметричность	Транзитивность	Антисимметричность
Универсальное				
Пустое				

Каждый ответ нужно обосновать.

10. Указать, какие из отношений в задании 6 являются отношением эквивалентности, а какие отношением порядка. Для каждого отношения эквивалентности построить разбиение множества M , а для каждого отношения порядка — диаграмму Хассе.

11. Указать, какие из отношений в задании 7 являются отношением эквивалентности, а какие отношением порядка. Для каждого отношения эквивалентности построить разбиение множества M , а для каждого отношения порядка — диаграмму Хассе.

12. На множестве имен существительных русского языка задано отношение R :

$x R y$ тогда и только тогда, когда слово x получается из слова y вычеркиванием некоторого множества букв (возможно, пустого).

а) Докажите, что R — отношение порядка.

б) Для слова «математика» постройте диаграмму множества слов, не превосходящих его относительно данного порядка R .

13. Объясните, почему любое конечное упорядоченное множество имеет максимальные и минимальные элементы.

14. Пусть R – множество всевозможных бинарных отношений на четырехэлементном множестве.

а) Сколько элементов содержится в R ?

б) Каких отношений в R больше: отношений эквивалентности или отношений порядка?